

**Морозов А.В.**

Державне підприємство «Запорізьке машинобудівне конструкторське бюро «Прогрес» імені академіка О.Г. Івченка

## ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ПРУЖНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОСПРЯМОВАНОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ

*Фундаментальна задача механіки композиційних матеріалів складається у обчисленні ефективних пружних характеристик по відомим пружним характеристикам структурних компонентів, тобто розгляд композиційного матеріалу на мікрорівні з наступним переходом на макрорівень. Натепер найбільш доцільним у визначенні ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів є використання верифікаційних теоретичних методів, оскільки цей підхід передбачає можливість аналізу напружень і деформацій у мікрооб'ємах композиційного матеріалу. Теоретичні методи дозволяють прогнозувати поведінку матеріалу для необхідних випадків навантажень і граничних умов, що дозволяє оптимізувати та раціонально проектувати структуру конструкції, виготовленої із композиційного матеріалу, на стадії розрахунків. Розробка теоретичної методики визначення ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу являє собою економічно виправдану науково-технічну задачу, вирішення якої дозволить скоротити час створення деталей, виготовлених із композиційних матеріалів, з потрібними характеристиками міцності та пружності.*

*Робота присвячена актуальній проблемі визначення ефективних пружних характеристик односпрямованих волокнистих композиційних матеріалів. У роботі запропонована методика проведення серії чисельних експериментів, які необхідні для повного визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу. Також у роботі визначені граничні умови, які потрібні для моделювання необхідних чисельних експериментів. За допомогою програмного комплексу ANSYS здійснено математичне модулювання та чисельне дослідження представницького елемента об'єму односпрямованого волокнистого вуглецевого композиційного матеріалу та визначені ефективні пружні характеристики еквівалентного гомогенного матеріалу.*

*Розроблена чисельна методика дозволяє вирішувати задачі механіки композиційних матеріалів за допомогою сучасних програмних комплексів, що використовують в математичній основі, – метод скінчених елементів*

**Ключові слова:** композиційні матеріали, ефективні пружні характеристики, чисельне усереднення, представницький елемент об'єму, чисельний аналіз.

**Постановка проблеми.** Використання сучасних полімерних композиційних матеріалів (ПКМ) у конструкції авіаційних газотурбінних двигунів (ГТД) характеризується низкою переваг порівняно з традиційними конструкційними матеріалами (металевими сплавами), серед яких високі питомі міцність та жорсткість і, як наслідок, вагова ефективність, можливість проектування конструкції з потрібними властивостями. На етапі проектування деталей з композиційних матеріалів необхідно проведення комплексу розрахункових та експериментальних досліджень як компонентів матеріалу, зразків композиційних матеріалів, так і готового виробу з ПКМ, що потребує багато часу. Скорочення часу впровадження деталей з ПКМ в конструкцію ГТД можливо шляхом розробки і застосування верифікаційних методів до цієї проблеми.

**Постановка завдання.** Метою статті є визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу.

### **Виклад основного матеріалу дослідження.**

Для здійснювання аналізу напруженого та деформованого стану (НДС) конструкції, виготовленої із композиційного матеріалу, потрібна інформація про його пружні властивості. Є два основних шляхи одержання характеристик міцності композиційних матеріалів.

Перший феноменологічний підхід пов'язаний з експериментальними дослідженнями зразків, виготовлених із композиційного матеріалу, що дозволяє визначити ефективні (еквівалентні, приведені, усереднені) пружні характеристики матеріалу, не зважаючи на його внутрішню структуру і вважаючи його однорідним анізотропним середовищем. Такий підхід використовує теорію анізотропних середовищ у розрахунках макроскопічних характеристик. При цьому немає можливості визначення полів напружень і деформацій у мікрооб'ємах композиційного матеріалу, зокрема на міжфазних межах [1]. Експериментальне визначення пружних

характеристик виявляє себе складну і кошовну технічну задачу, також у разі будь-якої зміни виду плетіння, характеристик волокна чи матриці, об'ємного вмісту компонентів, технології виготовлення матеріалу потребує повторного проведення всієї низки експериментів.

Другий підхід використовує методи структурного аналізу і пов'язаний з теоретичним визначенням ефективних пружних характеристик за відомими властивостями вихідних компонентів і структури композиційного матеріалу. Цей підхід передбачає аналіз напружень і деформацій усереднені компонентів та на міжфазних границях. Це дозволяє прогнозувати характеристики міцності та пружності для необхідних випадків навантажень і граничних умов, через що можливо оптимізувати та раціонально проектувати структуру конструкції, виготовленої із композиційного матеріалу.

**Теоретичні методи визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів.** Класичним є метод знаходження усереднених матеріальних функцій на зразках з неоднорідного матеріалу, в яких однорідний напружений або деформований стан (НДС) здійснюється тільки в середньому. Знайдені матеріальні функції описують ефективні визначаючі співвідношення [2]:

$$\hat{\sigma} = \check{F}(\hat{\varepsilon}, \bar{x}) \quad \langle \hat{\sigma} \rangle = \check{f}(\langle \hat{\varepsilon} \rangle, \bar{x}) \quad (1)$$

$$\hat{\varepsilon} = \check{G}(\hat{\sigma}, \bar{x}) \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \check{g}(\langle \hat{\sigma} \rangle, \bar{x}) \quad (2)$$

де  $\hat{\sigma}$  – тензор напружень;

$\hat{\varepsilon}$  – тензор деформацій;

$\check{F}$  – деякий оператор, тензор другого рангу;

$\check{G}$  – обернений  $\check{F}$  оператор;

$\langle \dots \rangle$  – середні значення величин.

Цей класичний метод має назву теорії ефективного модуля і не дозволяє здійснювати аналіз НДС всередині відокремлених компонентів композиційного матеріалу.

Фундаментальні основи методів визначення механічних характеристик полікристалів, закладені Фойгтом (Voight) [3] та Реуссом (Reuss) [4], також названі правилом суміші (rule of mixtures) [5]. Процедура усереднення по Фойгту припускає, що композиційний матеріал знаходиться в умовах постійної деформації, по Реуссу – постійного напруження. Ці оцінки являють собою середнє арифметичне та середнє гармонічне характеристик компонентів композиційних матеріалів.

$$E_{eff}^V = \sum_{i=1}^n f_i E_i, \quad E_{eff}^R = \left( \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{E_i} \right)^{-1} \quad (3)$$

де  $f_i$  – об'ємна концентрація компоненти композиційного матеріалу;

$n$  – число компонент.

Недоліки цього підходу видимі: використання схеми Фойгта надає завищену оцінку ефективного пружного модуля, а схеми Реусса – занижену.

Уточнення меж Фойгта-Реусса є актуальною задачею механіки композиційних матеріалів. Суттєвий вклад у рішення цієї задачі внесли Хашин і Штрікман [6; 7]. Підхід базується на варіаційному принципі для анізотропної неоднорідної середи і дозволяє визначити більш вузькі межі ефективних модулів. Особливістю метода є збіжність верхньої та нижньої межі у разі рівності модулів зсуву його компонентів.

Хілл у роботі [8; 9] запропонував під час визначення ефективних модулів використовувати гіпотезу рівності макроскопічної величини густини енергії деформації всього об'єму гетерогенного матеріалу середній величині густини енергії деформації всіх елементів цього об'єму. Також він зазначив, що найбільш вірогідним значенням ефективних модулів є середнє значення співвідношень (3).

У статті [10] стосовно ряду односпрямованих композиційних матеріалів визначено точність найбільш відомих методик визначення ефективних модулів.

**Ефективні пружні постійні композиційного матеріалу**

Оскільки об'єм матеріалу значно перевищує радіус волокна, то композиційний матеріал можна умовно вважати гомогенним з усередненими за об'ємом  $V$  значеннями компонентів тензору напружень і деформацій:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (1)$$

Для проведення розрахунків композиційний матеріал вважається гомогенним анізотропним матеріалом з усередненими пружними характеристиками, тому узагальнений закон Гука в тензорному запису має вигляд [11]:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = A_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (2)$$

де  $A_{ijkl}$  – константи податливості еквівалентного гомогенного матеріалу;

$\langle \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} \rangle$  – усереднені значення напружень і деформацій.

Здебільшого структура композиційного матеріалу робочої пружності має певну симетрію.

Якщо композиційний матеріал є ортотропним і має три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії, і якщо через них провести систему координат, то закон Гука зручно зобразити у матричній формі [12, 13, 14]:

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \\ \langle \gamma_{zx} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \tau_{zx} \rangle \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де  $a_{ij}$  – компоненти матриці податливості.

Коефіцієнти тензора податливості можна виразити через технічні пружні константи:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_x}; & a_{22} &= \frac{1}{E_y}; & a_{33} &= \frac{1}{E_z}; \\ a_{12} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y}; & a_{13} &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x} = -\frac{\nu_{zx}}{E_z}; & a_{23} &= -\frac{\nu_{yz}}{E_y} = -\frac{\nu_{zy}}{E_z}; \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{xy}}; & a_{55} &= \frac{1}{G_{yz}}; & a_{66} &= \frac{1}{G_{zx}}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $E_x, E_y, E_z$  – модулі пружності;  $\nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$  – коефіцієнти Пуассона;  $G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$  – модулі зсуву.

Узагальнений закон Гука в тензорному запису у зворотній формі має вигляд:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = B_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (5)$$

де  $B_{ijkl}$  – константи жорсткості еквівалентного гомогенного матеріалу.

$[B]$  – обернена матриця пружних постійних  $[B] = [A]^{-1}$

У матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \tau_{zx} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \\ \langle \gamma_{zx} \rangle \end{bmatrix}, \quad (6)$$

де  $b_{ij}$  – компоненти матриці жорсткості.

### Односпрямований композиційний матеріал

Розглянутий нижче підхід заснований на визначенні ефективних властивостей КМ згідно з властивостями його компонентів. Оскільки композиційний матеріал має періодичну структуру – вводиться поняття представницького елемента об’єму, в якому всі усереднені за об’ємом компоненти напружень і деформацій дорівнюють відповідним величинам, обчисленим для розглянутого композиту в цілому [15]. Результатом мікромеханічної постановки задачі є обчислення ефективних пружних постійних моношару композиційного матеріалу, що дозволяє надалі проводити дослідження на новому рівні абстрагування.

Під час визначення ефективних пружних постійних моношару композиту по відомим пружним характеристикам волокон і в’язучого потрібно моделювання чотирьох експериментів – при навантаженні шару уздовж та поперек армування, при поздовжньому та поперечному зсуві. Спільна робота волокон і в’язучого з різними пружними характеристиками є складною математичною задачею. Для рішення задачі використовуються моделі волокна і в’язучого з урахуванням їх спільної роботи.

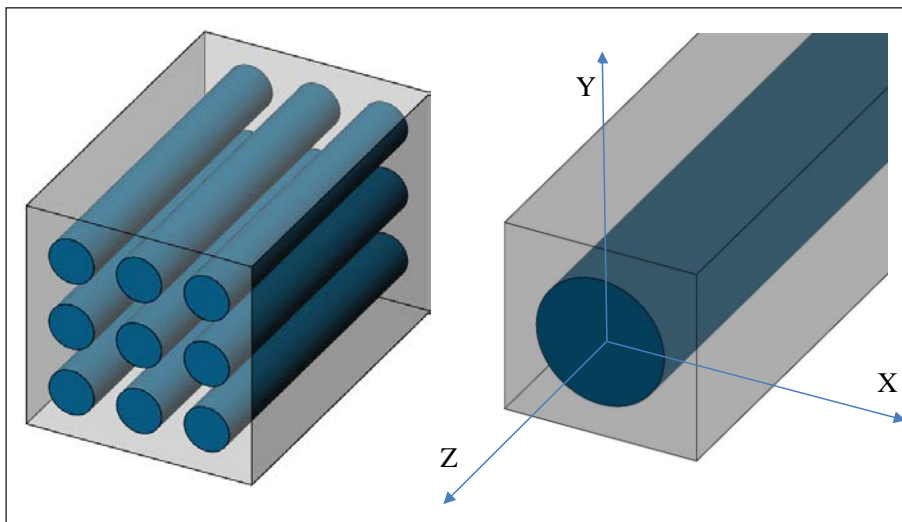


Рис. 1. Структура односпрямованого композиційного матеріалу та представницького елемента об’єму

Розрахункові експерименти проводяться з припущеннями, що:

1. Міжфазна межа має ідеальний контакт, тобто описується безперервністю переміщень і поверхневих напружень між волокном і в'язучим.

2. Компоненти композиту – однорідні і лінійно-пружні матеріали.

3. Волокна – прямі, паралельні, розподілені рівномірно.

Властивості композиційного матеріалу у напрямках  $x$  та  $y$  однакові, тому, враховуючи симетрію, маємо співвідношення:

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22}, \\ b_{13} &= b_{23}, \\ b_{55} &= b_{66} \end{aligned} \quad (7)$$

Чисельними експериментами моделюються чотири випадки деформування: розтягнення у напрямках  $Z$ ,  $X$  та зсув у площинах  $XY$ ,  $YZ$ .

Перший чисельний експеримент моделює розтягнення у напрямку  $Z$ . Визначаються компоненти жорсткості:

$$b_{13} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_z \rangle}; \quad b_{33} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_z \rangle} \quad (8)$$

Другий чисельний експеримент моделює розтягнення у напрямку  $X$ . Визначаються компоненти жорсткості:

$$b_{11} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{21} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle} \quad (9)$$

Третій чисельний експеримент моделює зсув у площині  $XY$ . Визначається компонента жорсткості:

$$b_{44} = \frac{\langle \tau_{xy} \rangle}{\langle \gamma_{xy} \rangle} \quad (10)$$

Четвертий чисельний експеримент моделює зсув у площині  $YZ$ . Визначається компонента жорсткості:

$$b_{55} = \frac{\langle \tau_{yz} \rangle}{\langle \gamma_{yz} \rangle} \quad (11)$$

У ПК ANSYS для проведення визначених експериментів використано скінчений елемент PLANE 183, що має 8 вузлів та дві степені вільності у кожному вузлу: переміщення у напрямках  $X$  та  $Y$ . Скінчений елемент застосовується для рішення плоских задач та має опцію узагальнена плоска деформація (*generalized plane strain*).

Для знаходження останньої константи, щоб не будувати тривимірну модель представницького

об'єму, доцільно використати математичну аналогію між задачею поздовжнього зсуву у площині  $YZ$  та задачею стаціонарного теплового аналізу у площині  $YZ$ .

Для двовимірного температурного поля  $T(x, y)$  диференціальне рівняння теплопровідності стаціонарного теплового режиму має вид [16; 17]:

$$\nabla^2 T = 0, \quad (12)$$

де  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Тепловий потік визначається співвідношеннями:

$$Q_x^1 = K_1 \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y^1 = K_1 \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Q_x^2 = K_2 \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y^2 = K_2 \frac{\partial T}{\partial y} \quad (13)$$

Функція переміщення  $w(x, y)$  у напрямку армування повинна задовольняти рівнянню:

$$\nabla^2 w = 0 \quad (14)$$

Зв'язок дотичних напружень з переміщеннями у поздовжньому напрямку з урахуванням різних модулів зсуву волокон та в'язучого виражається:

$$\tau_{xz}^1 = G_1 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz}^1 = G_1 \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \tau_{xz}^2 = G_2 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz}^2 = G_2 \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (15)$$

де  $G_1, G_2$  – модулі зсуву.

На межі волокна та в'язучого потрібні виконуватися умови неперервності. В задачі стаціонарної теплопровідності між температурою і тепловим потоком, в задачі поздовжнього зсуву між переміщеннями і дотичними напруженнями.

Як видно, крайові задачі стаціонарної теплопровідності (12), (13) та поздовжнього зсуву (14), (15) аналогічні. Тобто потрібно прийняти  $K_1 = G_1$ ,  $K_2 = G_2$  і значення температури  $T(x, y)$  стануть рівними переміщенню  $w(x, y)$ , а теплові потоки  $Q_x, Q_y$  стануть рівними дотичним напруженням  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ .

Під час моделювання задачі про стаціонарне розподілення температури був використаний 8-ми вузловий скінчений елемент PLANE77 з однією степеню вільності в кожному вузлу.

#### Проведення чисельних експериментів

Для моделювання представницького елемента об'єму використані наступні дані щодо пружних властивостей компонентів композиційного матеріалу:

– волокно –  $E_a = 250$  ГПа;  $G_a = 104.17$  ГПа;  $\nu_a = 0.2$ ;  $\text{den} = 1790$  кг/м<sup>3</sup>;

– матриця –  $E_m = 4$  ГПа;  $G_m = 1.43$  ГПа;  $\nu_m = 0.4$ ;  $\text{den} = 1250$  кг/м<sup>3</sup>.

Розміри представницької моделі: довжини сторін одиничні; радіус волокна  $r = 0,8$ ; коефіцієнт об'ємного вмісту  $0,5027$ .

Після завершення аналізу у постпроцесорі обчислювались середні значення напружень:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= \int_0^1 \sigma_x(x=1, y) dy; \quad \langle \sigma_y \rangle = \\ &= \int_0^1 \sigma_y(x, y=1) dx; \quad \langle \sigma_z \rangle = \iint_0^1 \sigma_z dx dy \end{aligned} \quad (16)$$

Чисельні експерименти реалізовано за допомогою програмного комплексу ANSYS. Скінчено-елементна сітка має 17 211 елементів та 52 126 вузлів (рис. 2).

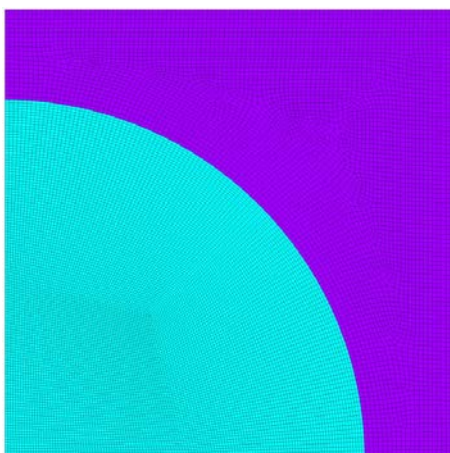


Рис. 2. Скінчено-елементна сітка представницької моделі

### Моделювання розтягнення у напрямку Z.

Граничні умови задаються наступним чином:

- на лініях  $x = 0, y = 0$  – умови симетрії;
- на лініях  $x = 1, y = 1$  – відсутність відповідних переміщень  $u_x = 0, u_y = 0$  і дотичних напружень  $\tau_{xy} = 0, \tau_{yx} = 0$ .

За допомогою опції *generalized plane strain* задається зусилля у напрямку армування, яке завдяки одиничним розмірам моделі буде дорівнювати значенню напруження  $\sigma_z$ . Для обчислення  $\sigma_z$  приймалось рівним  $10^6$  Па.

Вектор середніх деформацій має вигляд:

$$\langle \epsilon \rangle = [00 \langle \epsilon_z \rangle 000]^T \quad (17)$$

де  $\langle \epsilon_z \rangle$  обчислюється у постпроцесорі.

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (8) пружні характеристики еквівалентного матеріалу  $b_{13}, b_{33}$ .

### Моделювання розтягнення у напрямку X.

Граничні умови задаються наступним чином:

- на лініях  $x = 0, y = 0$  – умови симетрії;
- на лінії  $y = 1$  – переміщення  $u_y = 0$ , дотичне напруження  $\tau_{yx} = 0$ ;
- на лінії  $x = 1$  – переміщення  $u_x = \epsilon$ , дотичне напруження  $\tau_{xy} = 0$ .

Для обчислення  $\epsilon$  приймалось рівним  $10^{-3}$ .

Вектор середніх деформацій має вигляд:

$$\langle \epsilon \rangle = [\langle \epsilon_x \rangle 00000]^T \quad (18)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (9) пружні характеристики еквівалентного матеріалу  $b_{11}, b_{21}$ .

### Моделювання зсуву у площині XY.

Граничні умови задаються наступним чином:

- на лініях  $x = 0, x = 1$  – переміщення  $u_y = 0$ ;
- на лінії  $y = 0$  – переміщення  $u_x = 0$ ;
- на лінії  $y = 1$  – переміщення  $u_x = \epsilon$ .

Для обчислення  $\epsilon$  приймалось рівним  $10^{-3}$ .

Вектор середніх деформацій має вигляд:

$$\langle \epsilon \rangle = [000 \langle \gamma_{xy} \rangle 00]^T \quad (19)$$

У постпроцесорі обчислюється середнє значення дотичного напруження:

$$\langle \tau_{xy} \rangle = \int_0^1 \tau_{xy}(x=1, y) dy \quad (20)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (10) пружну характеристику еквівалентного матеріалу  $b_{44}$ .

### Моделювання зсуву у площині YZ.

Граничні умови задаються наступним чином:

- на лініях  $x = 0, x = 1$  – тепловий потік  $Q_y = 0$ ;
- на лінії  $y = 0$  – температура  $T = 0$ ;
- на лінії  $y = 1$  – температура  $T = 10^{-3}$ .

Вектор середніх деформацій має вигляд:

$$\langle \epsilon \rangle = [0000 \langle \gamma_{yz} \rangle 0]^T \quad (21)$$

У постпроцесорі обчислюється середнє значення дотичного напруження:

$$\langle \tau_{yz} \rangle = \int_0^1 \tau_{yz}(x, y=1) dx \quad (22)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (11) пружну характеристику еквівалентного матеріалу  $b_{55}$ .

### Результати чисельних експериментів

Розтягнення у напрямку Z (рис. 3, 4).

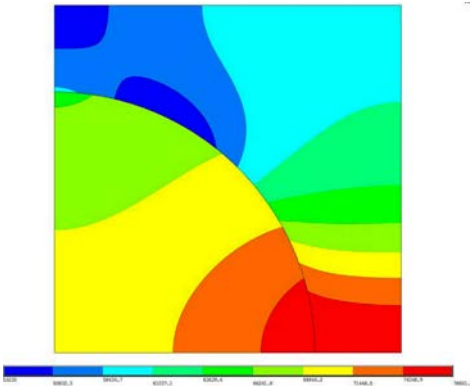


Рис. 3. Напруження  $\sigma_x$

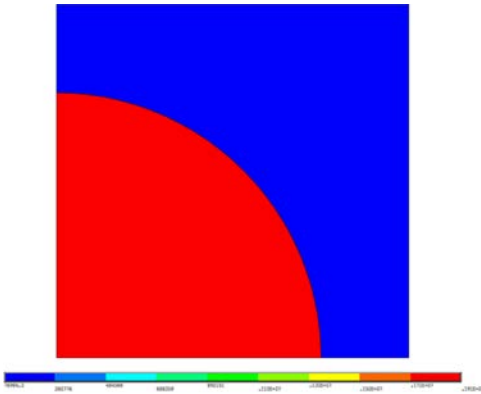


Рис. 4. Напруження  $\sigma_z$

Визначені в постпроцесорі величини (формули 16, 17):

$$\langle \varepsilon_z \rangle = 0.753 \cdot 10^{-5} ;$$

$$\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0.6603 \cdot 10^5 \text{ Па} ;$$

Компоненти матриці жорсткості (формули 8):

$$b_{13} = 0.8769 \cdot 10^{10} \text{ Па} ;$$

$$b_{33} = 13.2802 \cdot 10^{10} \text{ Па} .$$

Розтягнення у напрямку X (рис. 5).

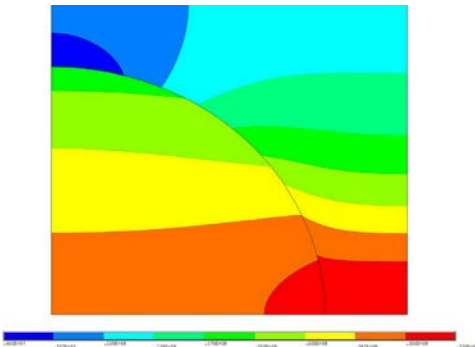


Рис. 5. Розподіл напружень  $\sigma_x$

Визначені в постпроцесорі величини (формула 16):

$$\langle \sigma_x \rangle = 0.21098 \cdot 10^8 \text{ Па} ;$$

$$\langle \sigma_y \rangle = 0.91430 \cdot 10^7 \text{ Па} .$$

Компоненти матриці жорсткості (формули 9):

$$b_{11} = 2.1098 \cdot 10^{10} \text{ Па} ;$$

$$b_{21} = 0.9143 \cdot 10^{10} \text{ Па} .$$

Зсув у площині XY (рис. 6).

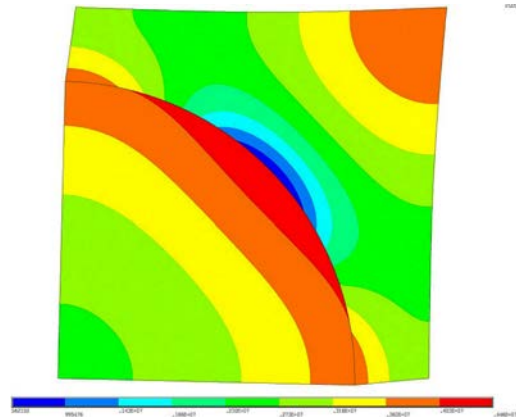


Рис. 6. Розподіл еквівалентних напружень

Визначена в постпроцесорі величина (формула 20):

$$\langle \tau_{xy} \rangle = 0.31184 \cdot 10^7 \text{ Па} .$$

Компонента матриці жорсткості (формула 10):

$$b_{44} = 0.3118 \cdot 10^{10} \text{ Па} ;$$

Зсув у площині YZ (рис. 7).

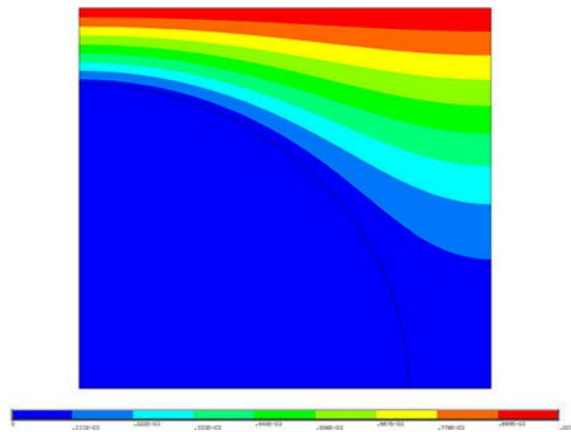


Рис. 7. Розподіл переміщень  $w$

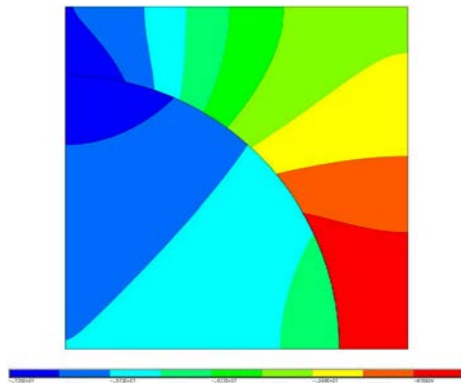


Рис. 8. Дотичні напруження  $\tau_{yz}$

Визначена в постпроцесорі величина (формула 22):

$$\langle \tau_{yz} \rangle = 0.42709 \cdot 10^7 \text{ Па} .$$

Компонента матриці жорсткості (формула 11):

$$b_{55} = 0.42709 \cdot 10^{10} \text{ Па} ;$$

Отже, матриця жорсткості має вигляд:

$$B = 10^{10} \cdot \begin{bmatrix} 2.1098 & 0.9143 & 0.8769 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9143 & 2.1098 & 0.8769 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8769 & 0.8769 & 13.2802 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3118 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4271 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4271 \end{bmatrix}$$

Матриця податливості:

$$A = 10^{-10} \cdot \begin{bmatrix} 0.5902 & -0.2463 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2463 & 0.5902 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0227 & -0.0227 & 0.0783 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.3414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.3414 \end{bmatrix}$$

Ефективні пружні характеристики композиційного матеріалу наведені в таблиці 1.

Визначені ефективні модулі еквівалентного гомогенного матеріалу знаходяться в інтервалі між значеннями, визначеними за методом Реуса та Фойгта, а ефективний модуль  $E_z$  співпадає зі значенням, одержаним за Фойгтом.

**Висновки.** Робота присвячена розробці чисельної методики визначення ефективних пружних характеристик односпрямовано армованих волокнистих композиційних матеріалів. Дослідження здійснене методом скінчених елементів за допомогою програмного комплексу ANSYS.

Виконано математичне моделювання представницького елемента об'єму та чисельне визначення ефективних пружних характеристик вуглецевого ПКМ за допомогою проведення серії чисельних експериментів.

Запропонована методика потребує подальшого розвитку для можливості розрахунків ефективних пружних характеристик тривимірно армованих композиційних матеріалів.

Таблиця 1

**Ефективні пружні постійні односпрямованого композиційного матеріалу**

Модуль пружності, МПа			Коефіцієнт Пуассона			Модуль зсуву, МПа		
$E_x$	$E_y$	$E_z$	$\nu_{xy}$	$\nu_{xz}$	$\nu_{zx}$	$G_{xy}$	$G_{yz}$	$G_{zx}$
16945	16945	127717	0.4173	0.0340	0.0900	3118.4	4270.9	4270.9

**Список літератури:**

1. Карпинос Д.М. Композиционные материалы. Справочник / Д.М. Карпинос. Киев : Наукова думка, 1985. 592 с.
2. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
3. Voight W. Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin: Teubner, 1928. 962 p.
4. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Zs. Angew. Math. und Mech.*, Vol. 9, №. 1, 1929. pp. 49–58.
5. Harris B. Engineering Composite Materials. London : The Institute of Materials, 1999. 194 p.
6. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids.*, Vol. 11, 1963. pp. 127–140.
7. Hashin Z. On some variational principles in Anisotropic and Nonhomogeneous Elasticity. *J. Mech. Phys. Solids.*, Vol. 10, 1962. pp. 835–842.
8. Hill R. The Elastic Behavior of a Crystalline Aggregate. *Proc. Phys. Soc.*, Vol. A65, Pt 5, n 389 A, 1952, pp. 349–354.
9. Hill R. Self-Consistent Mechanics of Composite Materials. *J. Mech. Phys. Solids.*, Vol. 13, 1965. pp. 213–222.

10. Бахина Е.В. Выбор аналитических методик для определения механических характеристик однонаправленных композиционных материалов на основе стекловолокон. *ISSN 0556-171X. Проблемы прочности*. 2014. № 1.
11. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Москва : Машиностроение, 1980. 375 с.
12. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А., Соппротивление жестких полимерных материалов. Изд. 2, «Зинатне», Рига, 1972.
13. Robert M. Jones, *Mechanics of composite materials / 2nd ed.*, 1999.
14. Dvorak G.J. *Micromechanics of Composite Material, Solid Mechanics and Its Applications* 186, DOI 10.1007/978-94-007-4101-0, Springer Science + Business Media B.V. 2013.
15. Механика композиционных материалов / ред. Дж. Сендецки, Т 2, Москва, «Мир»., 1978.
16. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва : Высшая школа, 1967, 625 с.
17. Денисов М.А. Математическое моделирование теплофизических процессов ANSYS и САЕ-проектирование. Екатеринбург : УрФУ, 2011. 149 с.
18. Szabo V. Unidirectional fiber-reinforced composite laminae: Homogenization and localization. *Computers and Mathematics with Applications* (2015). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2015.02.015>.
19. Huang Z.M. Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model. *Composites: Part A* 32, 2001, pp. 143–172
20. Meguid S.A. et al. On the local elastic–plastic behaviour of the interface in titanium/silicon carbide composites. *Composites: Part A* 33, 2002, pp. 1629–1640
21. A.B. Tran et al. A simple computational homogenization method for structures made of linear heterogeneous viscoelastic materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200, 2011, pp. 2956–2970.

#### **Morozov A.V. DETERMINATION OF EFFECTIVE ELASTIC CHARACTERISTICS OF UNIDIRECTIONAL COMPOSITE MATERIAL**

*The fundamental goal of the Mechanics of composite materials is to calculate effective elastic characteristics on the basis of known elastic characteristics of structural components, i.e. to consider a composite material at the micro level with subsequent transition to the macro level. At present, the most appropriate approach in determining the effective elastic characteristics of composite materials is the use of theoretical verification methods as this approach provides for the analysis of stresses and strains in the micro volumes of a composite material. Theoretical methods allow to predict the material behavior for required load cases and boundary conditions, which enables to optimize and rationally design the structure of constructions made of a composite material in the calculation stage. The development of theoretical methods for determining effective elastic characteristics of the composite material is an economically justified scientific and technical problem, the solution of which will reduce the time of creation of parts made of composite materials with the required characteristics of strength and elasticity.*

*The paper is devoted to the actual problem of determining effective elastic characteristics of unidirectional fiber composite materials. This paper offers a method to perform a series of numerical experiments are necessary to fully define the effective elastic characteristics of the unidirectional composite material. The paper also defines the boundary conditions required to simulate the necessary numerical experiments. With the help of the ANSYS software package, the mathematical modeling and numerical analysis of a representative volume element of unidirectional carbon fiber composite material is performed and defines the effective elastic characteristics of equivalent homogeneous material defined.*

*The developed numerical method allows to solve the problems of the mechanics of composite materials with the help of modern software systems, in which mathematical framework the finite element method is used.*

**Key words:** *composite materials, effective elastic characteristics, numerical homogenization, representative volume element, numerical analysis.*